TITLE:

2次元非圧縮性粘性流体の方程式系の周期解に関する分岐問題(函数解析を用いた偏微分方程式の研究)

AUTHOR(S):

松田, 真実

CITATION:

松田, 真実. 2次元非圧縮性粘性流体の方程式系の周期解に関する分岐問題(函数解析を用いた偏微分方程式の研究). 数理解析研究所講究録 1996, 969: 103-107

ISSUE DATE:

1996-10

URL:

http://hdl.handle.net/2433/60658

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
969 巻 1996 年 103-107

2次元非圧縮性粘性流体の方程式系の周期解に関する分岐問題

奈良女子大・理(院生) 松田 真実 (MAMI MATSUDA)

ここでは、粘性流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式系の、非圧縮, 定常であるものの2次元の場合を取り扱う。Vは速度、Pは圧力、Fは外力、νは運動粘性率である。

$$(1) \quad \begin{cases} (V\cdot\nabla)V = -\nabla P + \nu\Delta V + F \\ \nabla\cdot V = 0 \end{cases}$$

$$\left((V\cdot\nabla)V = \sum_{i=1}^{2} V_i\frac{\partial}{\partial x_i}V \quad、\quad \Delta = \nabla^2 = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.\right)$$

(1) に、特殊な周期外力

$$F = \begin{pmatrix} \gamma\sin\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad、\quad \gamma > 0$$

を与えて、条件:

- ○ 領域は、$\alpha > 0$ を縦横比として、

$$D = \left\{(x,y)\ ;\ |x| \leq \frac{\pi}{\alpha}\ ,\ |y| \leq \pi\right\}.$$

- ○ 速度 $V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は x について $\frac{2\pi}{\alpha}$ 周期、yについて 2π周期
- ○ $\iint_D V(x,y)dxdy = 0$.
- ○ $\iint_D P(x,y)dxdy = 0$.

の下で得られる周期解を考察する。

目的は、ある特殊解の近傍での定常解の分岐の構造について調べることである。そのためにまず，stream function とよばれる$\Psi(x,y)$ を導入し、速度を１次元化する。これは、(1) の第２式から、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_y \\ -\Psi_x \end{pmatrix}$$

を満たすような$\Psi(x,y)$ を選べばよく、先の条件を考慮して、

$$\Psi(x,y) = d + \int_{C((0,0),(x,y))} udy - vdx,$$

$$\left(\text{但し、} d \text{ は、} \iint_D \Psi(x,y)dxdy = 0 \quad \text{を満たす定数}\right)$$

で$\Psi(x,y)$ を決めると、積分路Cによらずに定まり、Ψに関してもVと同様の周期性が得られる。

これによって、(1) は、次式と同値になる。

$$(2) \qquad \begin{cases} -J(\Psi,\Delta\Psi) = \nu\Delta^2\Psi + \gamma\cos y \\ 2(\Psi_{xy}^2 - \Psi_{xx}\Psi_{yy}) = -\Delta P \end{cases}$$

$$\left(J(f,g) \equiv \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = f_x g_y - f_y g_x\right).$$

(2) の第２式によって、圧力 Pは$\Psi(x,y)$ から定まるので、以後は第１式のみを考察することにする。

関数空間として、Sobolev 空間 $H^4(D)$ の部分空間で、元ψが次の３つの条件：

(i) x について$\frac{2\pi}{\alpha}$周期、yについて 2π周期 。

(ii) $\iint_D \psi(x,y)dxdy = 0$.

(iii) $\psi(x,y) = \psi(-x, -y)$.

を満たすような空間 Xを設定する。　Xでのノルムは、

$$\|\psi\|_X = \sqrt{(\psi , \psi)} = \left(\iint_D \left|\Delta^2\psi\right|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \quad (= \|\Delta^2\psi\|_{L^2})$$

で定義する。　この空間内で、(2) の第１式を満たす定常解（特殊解）

$$\psi_0(x,y) = -\frac{\gamma}{\nu}\cos y$$

をとり、このψ_0のまわりでの解，すなわち

$$\psi = \frac{\gamma}{\nu}(\varphi - \cos y) \qquad \left(\psi = \frac{\gamma}{\nu}\varphi + \psi_0\right)$$

という形の解について調べていく。

(2) の第１式に代入すると、φ についての式

(3) $$\Delta^2\varphi - \lambda\{\sin y\,(\Delta + I)\,\varphi_x - J(\varphi\,,\,\Delta\varphi)\} = 0 \quad , \qquad \lambda \equiv \frac{\gamma}{\nu^2}.$$

が得られる。　さらに、(3) を、空間 X内での Compact 作用素の方程式に帰着させると、次のような形になる。

(4) $$f(\lambda\,,\,\varphi) \equiv \varphi - \lambda K[\varphi] = 0 \quad .$$

但し、

$$K[\varphi] \equiv \Delta^{-2}[\sin y\,(\Delta + I)\,\varphi_x - J(\varphi\,,\,\Delta\varphi)] \quad .$$

任意のλに対して、$\varphi \equiv 0$ は (4) の解である。この、$\varphi \equiv 0$ の近傍における (4) の解の分岐について調べる問題には、λと、領域の縦横比αが深くかかわっている。

これまでの結果、$\alpha \geq 0$ ならば、λの値にかかわらず分岐は起きないこと、$0 < \alpha < 1$ ならば、(4) の線型化方程式 $f_\varphi(\lambda\,,\,0) = 0$ の特性値となるλの多重度が奇数であることから、そのλが分岐点となる（Krasnosel'skii の定理による）ことが示されている。([1] , [2])

しかし、分岐解そのものの有様に関しては明確に記述されてはおらず、数値実験による分岐図から分岐の凸性が判明し、αが十分小さいときにのみ、そのことが数学的に証明されていることになっていた。([3])

修士論文では、線型化方程式 $f_\varphi(\lambda\ ,\ 0)\ =\ 0$ の特性値のひとつ $\lambda\ =\lambda_1$ をとって、

(i) $\dim\ \ker\ (f_\varphi(\lambda_1\ ,\ 0))\ =\ 1$

(ii) $R\ (f_\varphi(\lambda_1\ ,\ 0))$ は余次元 1 の閉部分空間

(iii) $\varphi_1\in\ \ker\ (f_\varphi(\lambda_1\ ,\ 0))$ に対して、$f_{\lambda\varphi}(\lambda_1\ ,\ 0)[\varphi_1]\notin\ R(\ f_\varphi(\lambda_1\ ,\ 0))$

であることを検証し、Crandall と Rabinowitz の分岐定理 ('71) の適用によって、分岐曲線の形を得た。

主結果は以下のとおりである。

I：原点を含む区間、Z：$\ker\ (f_\varphi(\lambda_1\ ,\ 0))$ の直交補空間　に対して、

$$\lambda\ =\lambda(s):\lambda(0)\ =\lambda_1\ ,\ s\in\ I\quad\text{を満たす実数値連続関数}$$
$$z\ =z(\cdot\ ,\ s):z(\cdot\ ,\ 0)\ =\ 0\quad\text{を満たす Z-値連続関数}$$

が一意的に定まり、(4) の、$\lambda\ =\lambda_1$ 、 $\varphi\equiv\ 0$ の近傍での解は、

$$(\lambda\ ,\ \varphi)\ =(\lambda(s)\ ,\ s\varphi_1(\cdot\ )\ +\ s\ z(\cdot\ ,\ s))\qquad\left(\varphi_1\ \in\ \ker\ (f_\varphi(\lambda_1,0))\right)$$

で表される。

(i)~(iii) の検証方法について、簡単に触れておく。

(i) は、まず、$\lambda\ =\lambda_1$ に対応する固有関数 $\varphi_1(x\ ,\ y)$ を Fourier 級数で表現し、係数に関する 3 項間漸化式を導く。　この漸化式を、Meshalkin と Sinai の手法に基づいて、無限連分数を用いて解いていくが、題意にあった係数が定数因子の範囲で一意的に定められる事実を、連分数の性質から得ている。

(ii) の、閉部分空間であることは、作用素の compact 性から得られる。余次元が 1 であることは、$R\ (f_\varphi(\lambda_1,0))$ の直交補空間が、$f_\varphi(\lambda_1,0)$ の共役の零空間になることを示し、その零空間の次元が、(i) と同様の方法で 1 になることから従う。

(iii) は、直接計算による。

現在は、得られた (4) の解φの形から、$s = 0$ の近傍では、$\lambda = \lambda(s)$ の凸性が、分岐の凸性に関係しているとみて、$\lambda''(0)$ の符号を調べている。

References

1. L. D. Meshalkin and Ia.G. Sinai, Investigation of the stability of a stationary solution of a system of equations for the plain movement of an incompressible viscous liquid, J.Appl.Math.Mech. **25** (1962), 1700–1705.
2. V. I. Iudovich, Example of the generation of a secondary stationary or periodic flow when there is loss of stability of the laminar flow of a viscous incompressible fluid, J.Appl.Math.Mech. **29** (1965), 527–544.
3. H. Okamoto and M. Shoji, Bifurcation diagrams in Kolmogorov's problem of viscous incompressible fluid on 2-D flat tori, J.Indust.Appl.Math. **10** (1993), 191–218.